L' ABACO

Ipotesi sulla struttura di uno strumento di calcolo utilizzato dagli ingegneri dell' impero romano per le grandi opere pubbliche.

Ing. **Bruno Pistone** © 2006
brunopistone@virgilio.it

TRAIANVS © 2006

Premesse matematiche

La numerazione disponibile.

Al tempo della fondazione dell' Impero romano i calcolatori potevano utilizzare tre modelli principali di numerazione: quella figurativa egiziana, quella cuneiforme babilonese, quella (imperfettamente) decimale greco-romana.

La numerazione egiziana, in cui non si dava valore di posizione ai simboli numerici che venivano raggruppati, costringeva a inventare numerose procedure specifiche limitate a particolari problemi (per esempio, la divisione cominciava costruendo una serie di valori ottenuta raddoppiando più volte il divisore fino ad approssimare il dividendo). Questo ha molto ostacolato una sua evoluzione.

La numerazione babilonese era basata su valori decimali, duodecimali, e sessagesimali, e risulta ancora oggi assai chiara, perchè la posizione dei segni che indicano i numeri con la serie esponenziale (a base 10 o a base 60) ne dà immediatamente il valore come nella nostra aritmetica di oggi.

La numerazione greco-romana era generalmente decimale, come la nostra di oggi. Però era meno pratica di quella babilonese a causa della simbologia adottata per scrivere i risultati: per esempio CM (mille meno cento) invece del simbolo che dica direttamente 900.

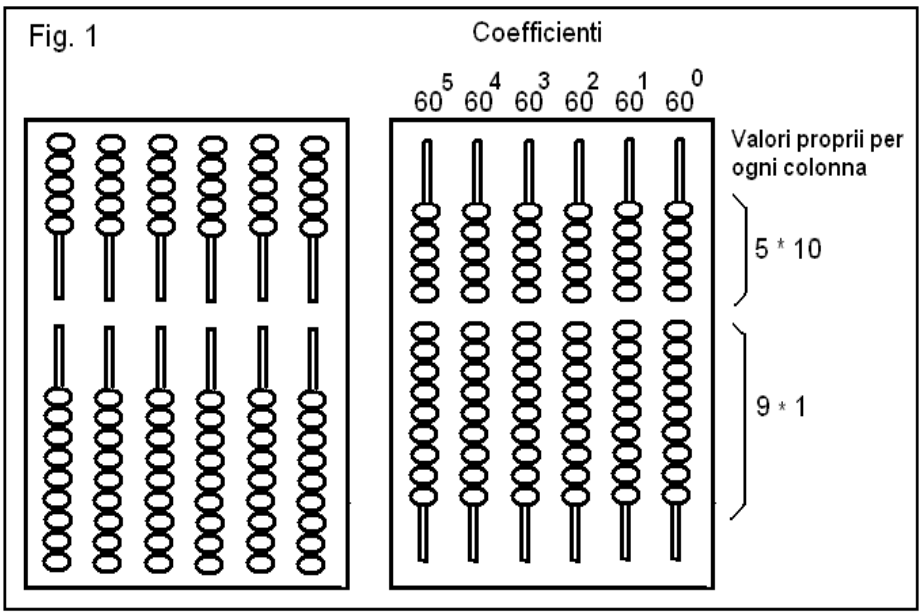
Dagli assiro-babilonesi sono pervenute tavolette contenenti operazioni di calcolo eseguite con linee tracciate sull' argilla. E' possibile che questo modo di scrivere venisse spesso usato anche per i calcoli ordinarii, come noi faremmo oggi con carta e matita.

Gli strumenti di calcolo disponibili.

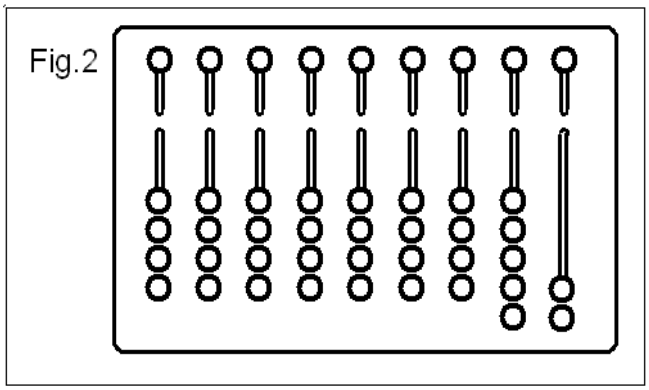
Dagli antichi Egiziani abbiamo ereditato molti interessanti calcoli aritmetici, ma non una vera procedura generalizzabile. E perciò non mi è possibile trovare riferimenti agli strumenti utilizzati.

Ritengo invece assai probabile che esistessero abaci babilonesi o anche fenici, sebbene non ne siano perevenuti fino ad oggi, perchè la numerazione adottata (sessadecimale) li rendeva efficacissimi soprattutto per i grandi numeri necessarii al catasto oppure all' astronomia. Essi possono memorizzare in poche colonne numeri colossali. Nella figura che segue ne rappresento uno che con solo 6 righe riesce a indicare il numero 46.655.999.999

http://www.traianvs.net/



Dell' abaco romano si possono vedere nei musei alcuni esemplari originali. La figura sottostante ne rappresenta uno schema.



Si nota subito che le due ultime colonne sembrano predisposte per indicare cifre scomponibili rispettivamente in dodici parti e in sei parti, mentre le altre colonne indicano numerazione decimale.
Queste hanno certamente per coefficienti le potenze di 10. Perciò la cifra massima rappresentabile supera di poco 9* 10^7 anche utilizzando 8 colonne.
Chi volesse operare con questo abaco resterebbe un po' imbarazzato nel trasferire i dati da una colonna all' altra. Per esempio quando una somma dà un valore superiore al contenuto della colonna, occorre aggiornare la colonna che precede, e può accadere che anche questa colonna sia "satura" e si debba aggiornare ancora un' altra colonna. Per ridurre questo lavoro di "trasferimento" gli abaci moderni russi o giapponesi, che sono quasi identici a quelli romani, contengono due palline in più per ogni colonna (sopra e sotto).

http://www.traianvs.net/

Nel caso della moltiplicazione o divisione le difficoltà diventano addirittura insuperabili per un operatore normale. Per memorizzare i dati intermedii bisognerebbe utilizzare una parte delle colonne, riducendo ancora di molto la grandezza dei numeri che si possono elaborare.
Mi pare evidente che questa versione di abaco non sarebbe sufficiente né per segnare grossi numeri, né per per calcoli complessi. Esso serviva probabilmente come un taccuino solo per i piccoli calcoli quotidiani (mercato al minuto o piccole operazioni di cambiavalute).

Ipotesi sulle caratteristiche funzionali di un abaco.

1 – Se gli abaci a noi pervenuti sono troppo semplici e troppo piccoli per servire a quei lavori di ingegneria che i Romani hanno certamente eseguito, perchè non sono mai stati rinvenuti strumenti più efficaci ? Io ritengo probabile che i Romani usassero strumenti molto più grandi e molto più efficaci, e non necessariamente a base decimale, ma eventualmente anche sessagesimale (nei Paesi in cui si usava questa notazione). I motivi per cui non sono sopravvissuti fino a noi potevano essere questi:
I) gli strumenti furono costruiti con materiali tanto pregiati che furono poi tutti smontati o fusi per riutilizzarli o venderli. Questa ipotesi pare statisticamente assai poco probabile.
II) Essi erano stati costruiti con materiali "poveri" ma facilmente sostituibili, forse costruiti addirittura di volta in volta. I punti che seguono rendono assai probabile questa seconda alternativa.

2 – Per le grandi opere pubbliche i Romani hanno utilizzato sempre la collaborazione di esperti locali, soprattutto a sud-est del Mediterraneo, dove le conoscenze scientifiche erano particolarmente avanzate. Perciò tutti i loro metodi, come anche le attrezzature dei cantieri, dovevano essere assai adattabili. Non si poteva rinunciare alla collaborazione di un Apollodoro di Damasco perchè mancava l' abaco adeguato !

3 – Tutti i popoli che nel corso della storia sono riusciti, non solo a realizzare grandi operazioni (sia militari che civili) ma anche a conservare molto a lungo le loro conquiste, hanno sempre adottato il criterio di non sopravvalutare il carico di lavoro che si può affidare ai collaboratori. A ogni collaboratore si assegna un compito più semplice possibile, e sempre inferiore al massimo che egli potrebbe fare. Però non gli si lascia sperare nessuna indulgenza per errori o negligenze. Possiamo essere sicuri che questa regola valeva anche per i Romani.

4 – Dalle condizioni 2 e 3 deriva che i Romani dovevano ricercare sempre la più vasta semplificazione possibile nei metodi e nelle attrezzature. In cantieri delle dimensioni di quelle che ben conosciamo, affollati da centinaia di tecnici, non si poteva assolutamente tollerare alcuna fonte di rischio per equivoci o dimenticanze.

5 – Non possiamo ignorare che la parola "calculus" significava "sassolino" e che si sono trovate in Grecia e in Asia lastre di pietra su cui erano tracciate linee ortogonali, che certamente servivano per il calcolo (posizionale) con l' "abacus".

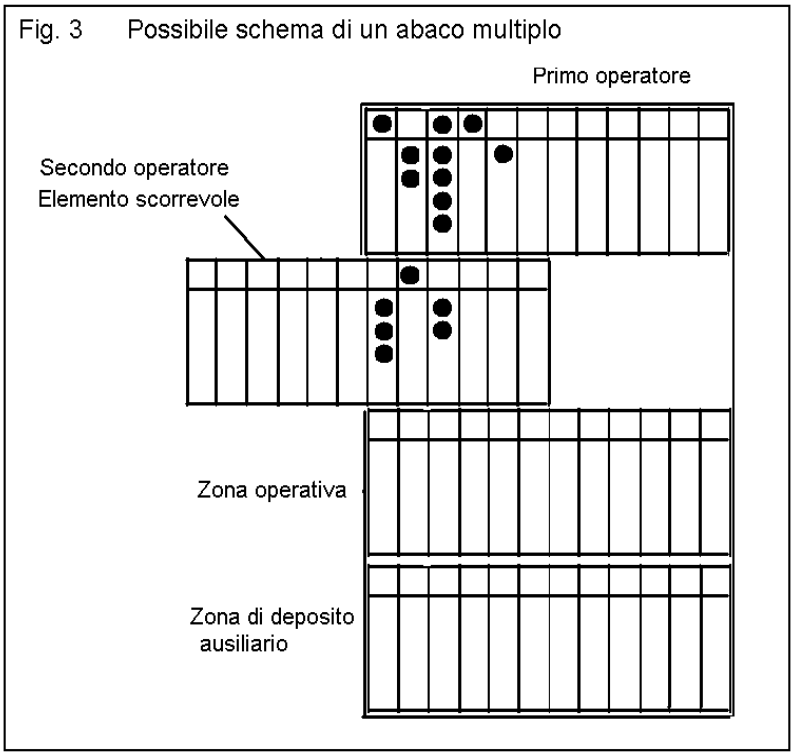
6 – Bisogna anche considerare che, nelle zone dove nelle epoche classiche erano più sviluppate le nozioni scientifiche, si usavano almeno i tre tipi principali di numerazioni già citati: quella

http://www.traianvs.net/

sessagesimale dei babilonesi, quella non posizionale degli Egiziani, e quella "quasi" decimale dei Greci e dei Fenici. Dunque anche lo strumento di calcolo doveva essere adattabile alle usanze locali.

7 - Per tutti questi motivi a me sembra possibile che si utilizzasse un abaco molto simile a quello disegnato nella figura seguente. Chi non fosse pratico nell' uso degli abaci troverà alla fine di questa relazione due esempi di utilizzo: moltiplicazione e divisione.

Fig. 3 Possibile schema di un abaco multiplo



Questo abaco poteva essere costruito con mezzi semplicissimi: addirittura solo con linee tracciate su un tavolo o perfino sul terreno spianato, usando sassolini per scrivere i numeri.
Teoricamente la sua potenza è illimitata, non solo perchè si può aumentare il numero delle colonne, ma anche perchè, cambiando il numero dei sassolini usati in ogni cella, si può calcolare anche con una notazione sessagesimale. Un calcolatore un poco allenato potrebbe lavorare alla stessa velocità che era usuale in Europa quando, nel secolo 19. dC, si usava penna o matita.
In questo abaco si notano due reparti (rispettivamente zona operativa e zona deposito) in cui si possono depositare i risultati provvisorii: questo permette di scomporre in fasi elementari la procedura di calcolo, che diventa più facile, e quindi più sicura. I vantaggi sono evidentissimi, e sarebbe davvero strano che gli antichi matematici non avessero pensato a una soluzione tanto facile e tanto utile.
Non è difficile stabilire la posizione delle eventuali virgole osservando la posizione dell' ultima colonna significativa del divisore.
E' possibile che gli antichi ingegneri, se volevano ignorare la virgola, usassero unità di misura assai piccole per esprimere il dividendo. Per esempio gli ingegneri romani avrebbero potuto usare come unità di misura il passo o il piede invece delle miglia.

http://www.traianvs.net/

Osservazioni sui particolari costruttivi di un abaco.

Prima osservazione.
Negli abaci a noi pervenuti si trovano per ogni colonna un "calcolo" (sassolino) sulla parte superiore e quattro sulla parte inferiore. Ma chi volesse provare a eseguire le operazioni avrebbe difficoltà a rappresentare i risultati parziali usando solo questo numero classico di sassolini ossia "calcoli". Perchè di solito ogni volta che si esegue ogni singola operazione si debbono sommare su una colonna diversi risultati parziali. La rappresentazione canonica con solo cinque "calcoli" per colonna richiede un lavoro di ridistribuzione dei "calcoli" fra le colonne contigue, e questo è non solo faticoso, ma fonte di distrazione e quindi di errori.
Si lavora assai più comodamente se mentre si eseguono le operazioni si può lasciare un numero maggiore di "calcoli" in ogni colonna (per esempio lasciare due o più "calcoli" di valore 5 nella parte superiore, e dieci in quella inferiore), e riordinare i risultati solo alla fine di ogni fase, quando si ha il risultato finale di ogni operazione. A me pare veramente assurdo che i tecnici o gli amministratori dell' Impero romano, occupati per secoli in progetti di scala continentale, si contentassero di strumenti in cui l' uso delle colonne fosse così limitato, dal momento che era facilissimo costruirli di più capaci, per rappresentare con un numero maggiore di "calcoli" (cioè sassolini) i risultati intermedi.

Seconda osservazione.
Si può facilmente intuire che se i "calcoli" fossero in qualche modo vincolati alla struttura dell' abaco, per esempio in forma di palline forate scorrevoli su bacchette come negli abaci russi o cinesi che si vedono oggi, un gran numero di "calcoli" che non servono immediatamente all' operatore resterebbero sull' abaco inutilizzati a poca distanza da quei "calcoli" con cui si sta operando. E' evidente che una tale quantità di "calcoli" presenti sulle bacchette costringe l' operatore a prestare molta attenzione non solo a quelli che deve manovrare, ma anche a quelli contigui, da lasciare in opera.
Questo aumenterebbe di molto la probabilità di errori. Perciò dobbiamo supporre che gli operatori riportassero sull' abaco soltanto i "calcoli" che erano di volta in volta necessarii. In pratica ciò ci suggerisce che usassero piccoli oggetti ("calcoli" o sassolini) non vincolati all' abaco, in modo da poterli allontanare dall' abaco quando non servivano più. Però bisogna anche supporre che i "calcoli" non ancora utilizzati restassero sempre facilmente accessibili, altrimenti la ricerca dei "calcoli" avrebbe troppo distratto l' operatore.

Terza osservazione.
A principio di questa relazione abbiamo detto che molto probabilmente gli "abaci" venivano costruiti di volta in volta con mezzi semplicissimi, adeguati anche alle diverse funzioni dell' utilizzatore. In considerazione di questa libertà di scelta di strutture e di materiali io non sarei più tanto sicuro che il valore assegnato ai "calcoli" derivasse sempre solo dalla posizione (rispettivamente valore "cinque" nei reparti superiori di ogni colonna e "uno" in quelli inferiori). Esiste infatti un' altra possibilità di distinguere il valore dei "calcoli": differenziandoli con il COLORE, che è forse anche più efficace.
Ognuno può facilmente constatare che per gli oggetti di cui ci stiamo occupando, stanti le loro dimensioni, sono più appariscenti le differenze di colore invece di quelle di "posizione". Sappiamo inoltre che il mondo classico non rifuggeva affatto dall' uso dei colori, anzi ne

http://www.traianvs.net/

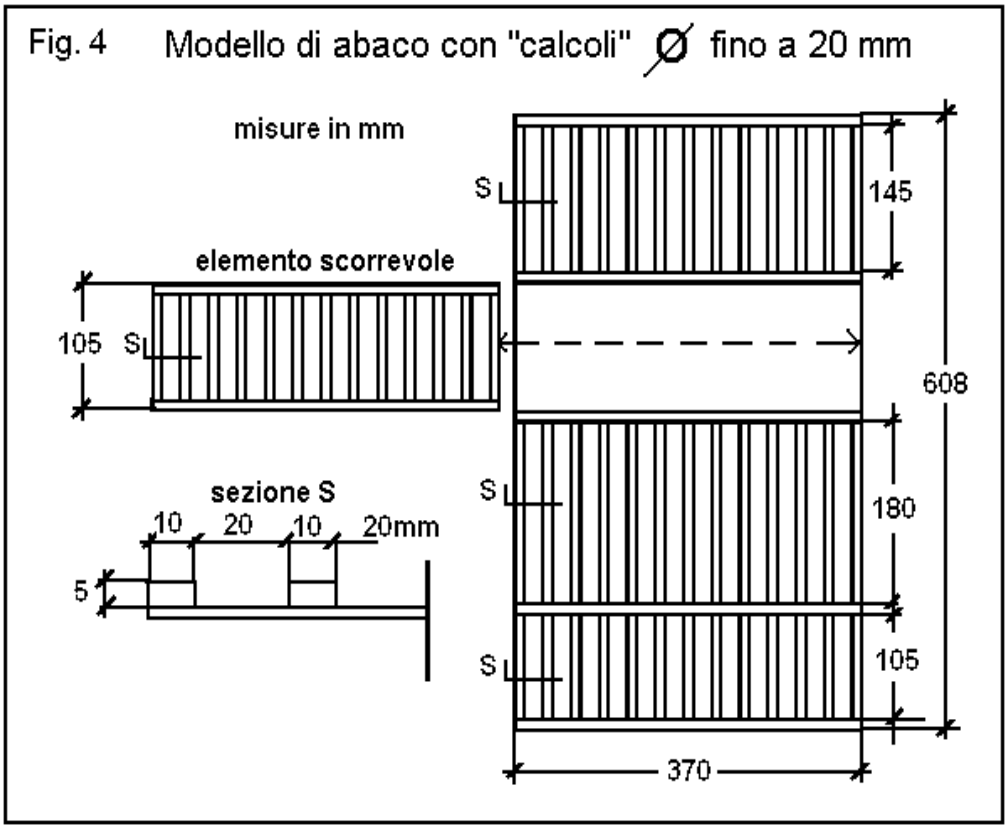
abbondava in modo che a noi qualche volta appare perfino di cattivo gusto. I tecnici di cui sto parlando potevano facilmente trovare e preparare sassolini o frammenti di ceramica
con colori contrastanti: per esempio bianchi e neri. E' possibile che non ci abbiano mai pensato ? Io lo escluderei assolutamente.

Quarta osservazione.
Le due semplificazioni fin qui ipotizzate per un abaco (togliere il vincolo al numero di "calcoli" contenuti in ogni colonna e differenziare i "calcoli" mediante il colore) fornirebbero un altro vantaggio: renderebbero l' abaco capace di funzionare con diversi sistemi di numerazione, per esempio a base 12, o addirittura a base 60 (mesopotamica). Un vantaggio enorme se consideriamo quanto fosse estesa l' area di impiego ai tempi degli antichi romani. Non possiamo assolutamente trascurare neanche questa possibilità quando valutiamo la probabilità di un nostro modello di abaco.

Una possibile struttura dell' abaco adatto a servire nei cantieri e negli uffici.

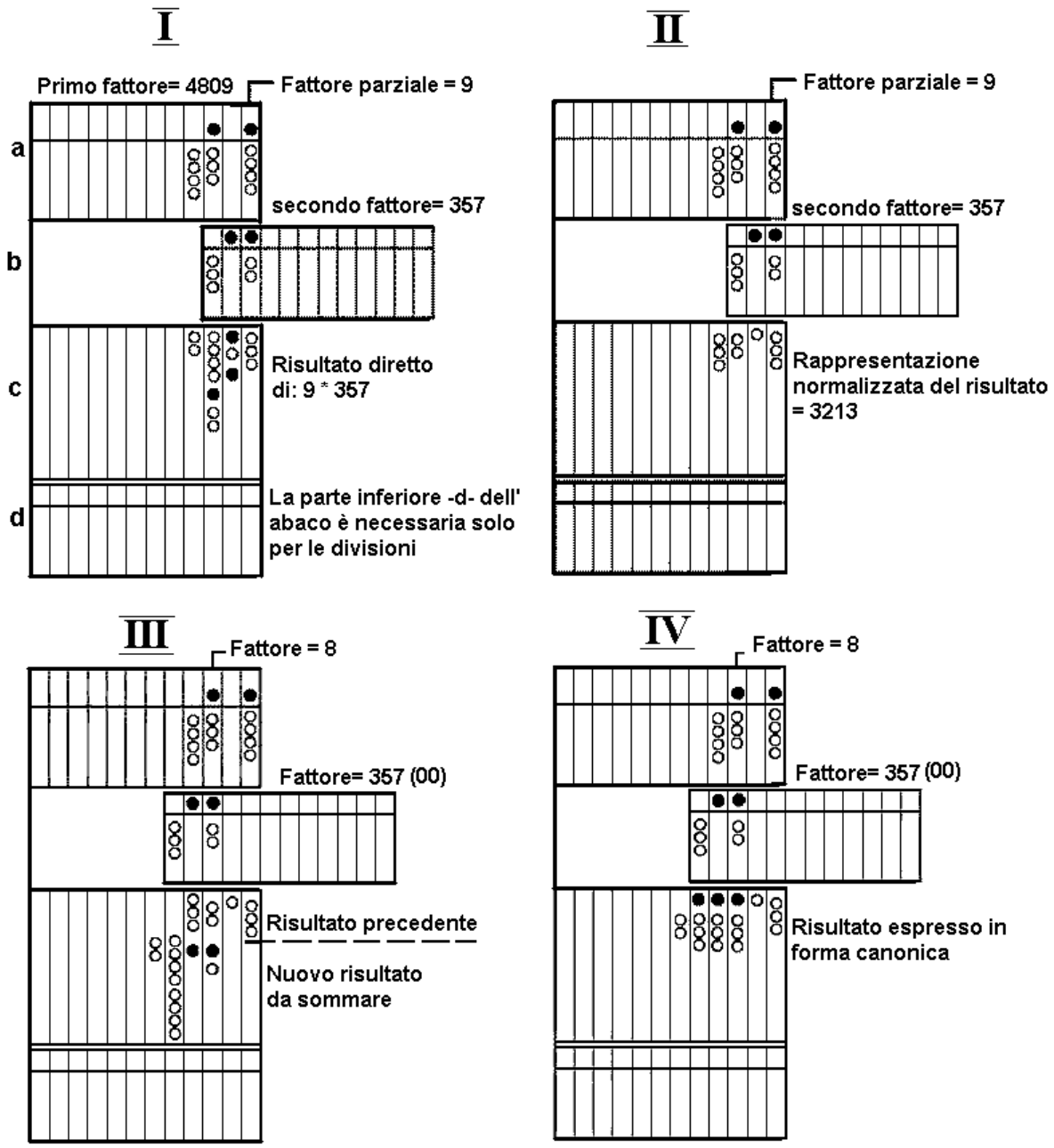
Presento adesso un mio modello di abaco che sembra rispondere a tutte le esigenze che ho finora elencate, tranne una: i "calcoli" che non sono ancora stati utilizzati possono restare depositati nelle vicinanze dell' abaco, non si trovano cioè direttamente "sotto" le dita dell' operatore, e questo rende l' uso più difficoltoso. Presento per ora questo primo modello allo scopo di mostrare come si eseguano le operazioni. Subito dopo ne presenterò una variante, che fornisce maggiore comodità nella manovra dei "calcoli" a chi già avesse un minimo di esperienza con questi strumenti.
Questo abaco è stato effettivamente costruito in legno, e utilizzato per controllarne l' affidabilità. Ma non è affatto necessario che l' abaco antico fosse costruito in legno. Si potrebbe costruirlo, per esempio, semplicemente disegnando righe e colonne su un qualunque supporto anche provvisorio, eventualmente usando rametti come separatori fra le varie zone di calcolo. Il modello che mostro qui vale solo per la sua geometria.
Nelle pagine seguenti si vedrà come si impiega questo abaco per la moltiplicazione e per la divisione. Le altre operazioni sono ovvie.
In questo abaco il valore dei "calcoli" sarà indicato dal colore; negli esempii che faremo il colore bianco indicherà le unità, il colore nero il valore 5. Ma questo valore 5 potrebbe anche cambiare per le aritmetiche non decimali. Per esempio potrebbe valere 10 per un abaco babilonese. La funzionalità dell' abaco non ne risulta diminuita !

http://www.traianvs.net/



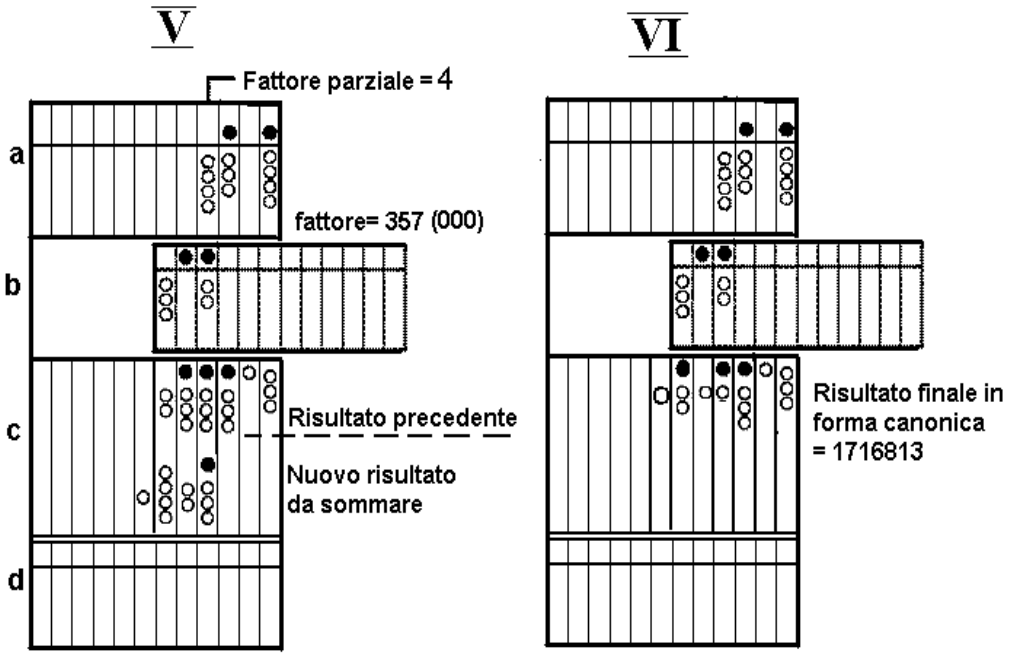
http://www.traianvs.net/

Fig. 5 Esempio di moltiplicazione: 4809 * 357



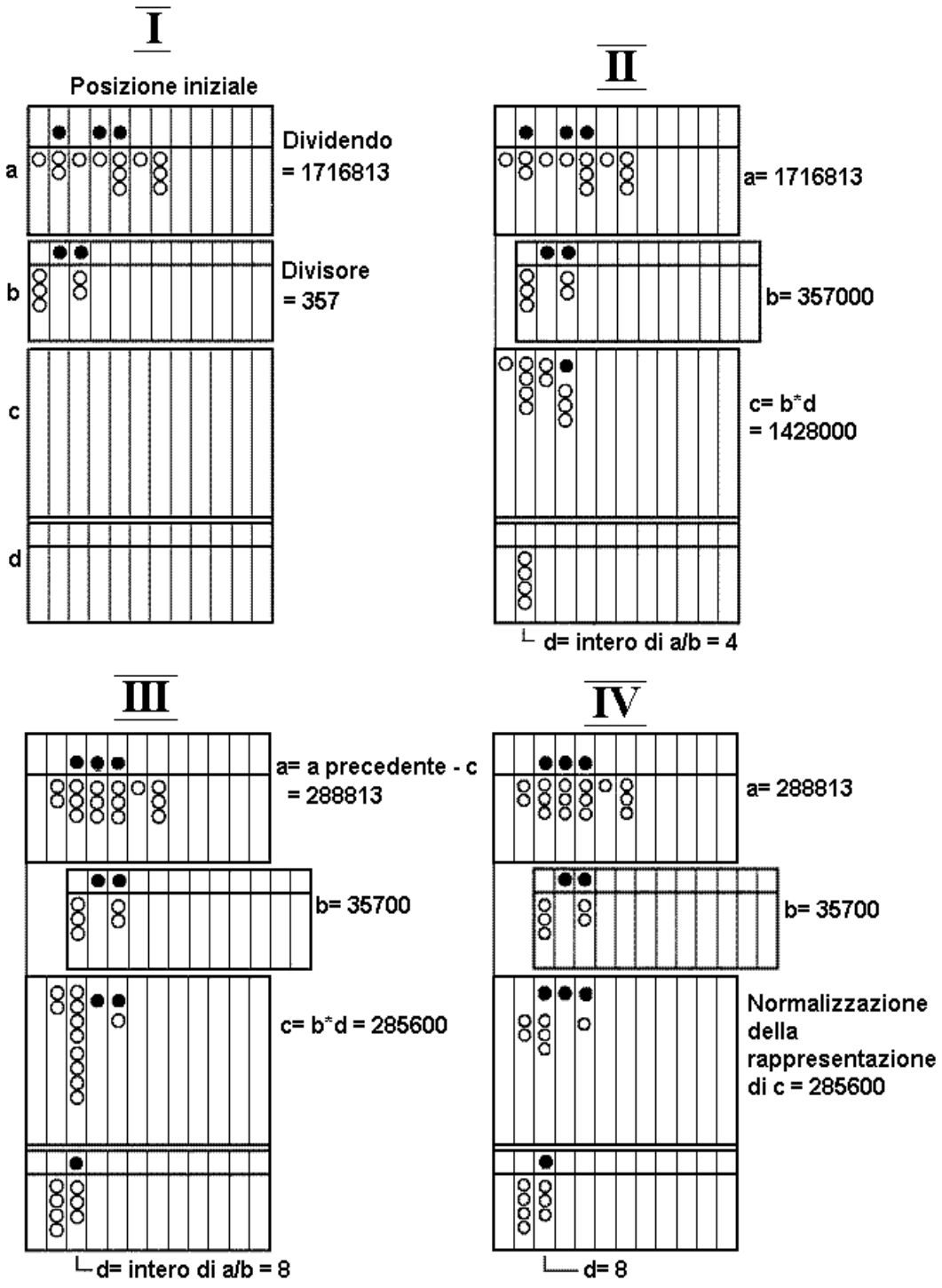
http://www.traianvs.net/

Fig. 6



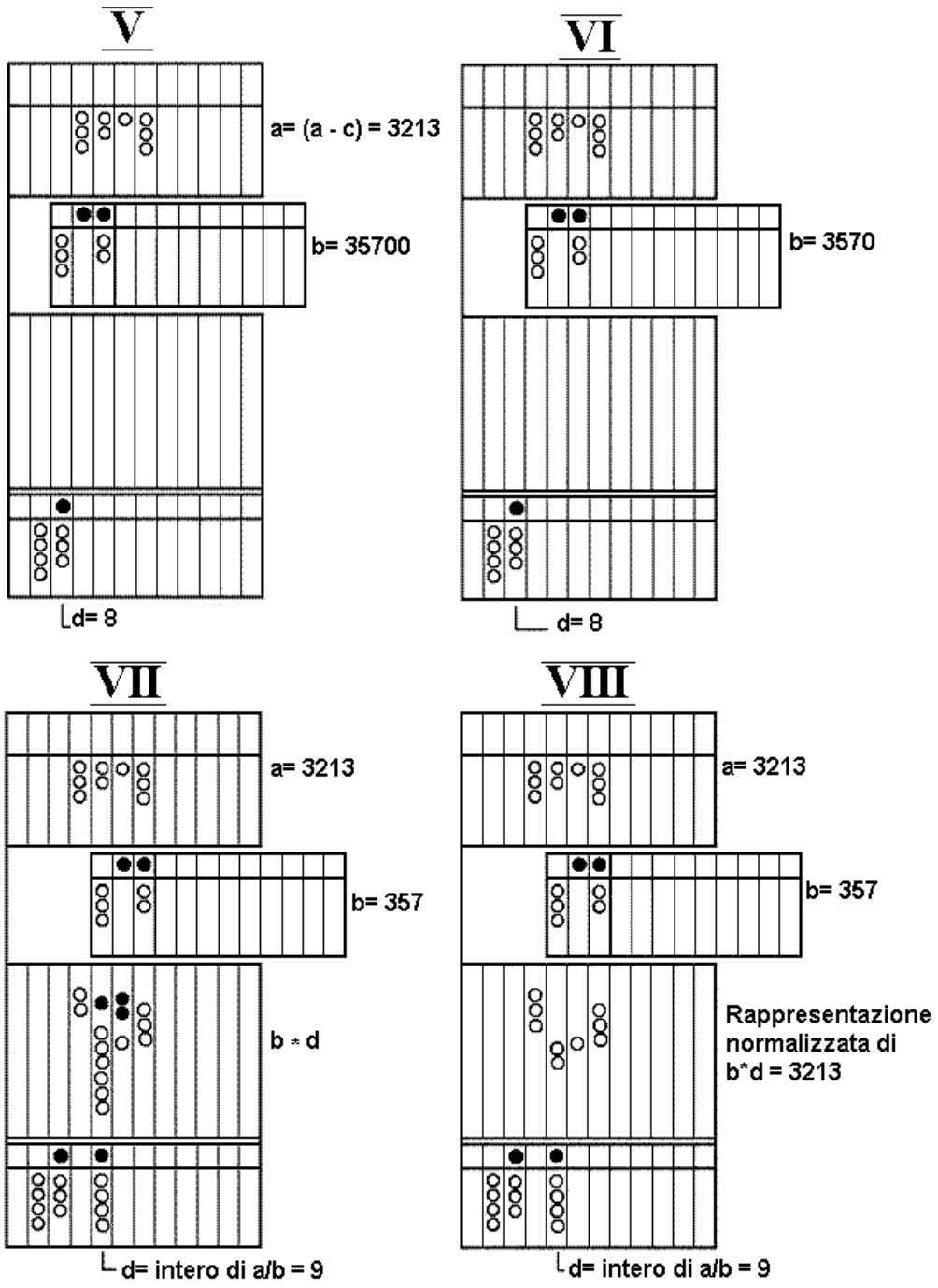
http://www.traianvs.net/

Fig. 7 Esempio di divisione



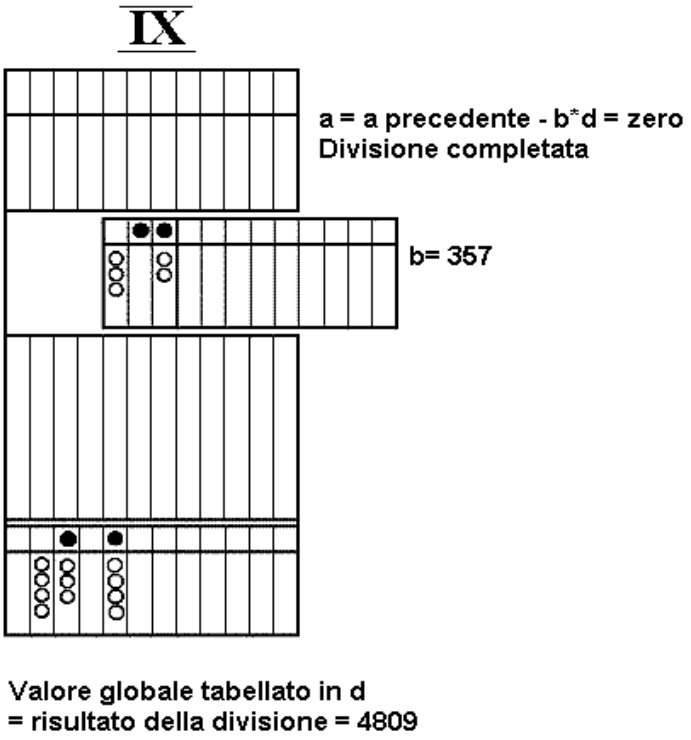
http://www.traianvs.net/

Fig. 8



http://www.traianvs.net/

Fig. 9



Possibile impiego dell' abaco per notazioni di numeri non decimali (p.es. babilonesi).

Premesse.

Non possiamo qui affatto escludere che, nei periodi storici di cui ci stiamo occupando, i tecnici dovessero elaborare anche dati numerici non decimali. Basta ricordare quanto fossero allora progrediti ed economicamente importanti alcuni Paesi contigui alle coste di sud est del Mediterraneo. In molti di questi Paesi era ben diffusa la matematica babilonese, che almeno per i grandi numeri (ad uso del fisco o del catasto) impiegava una notazione mista sessagesimale/decimale. Ma anche le notazioni non basate sul valore di posizione delle cifre, per esempio quella egiziana, dovevano pure in qualche modo essere elaborate in modo analogo a quelle posizionali, decimali o sessagesimali che fossero.

Le relative procedure di calcolo non potevano limitarsi alle ricerche scientifiche, erano certamente applicate anche in tante attività pratiche, per esempio il fisco il commercio e l' ingegneria in generale.

I Romani dovevano senza dubbio occuparsene perchè erano impegnati assai attivamente in queste attività e spesso proprio nei dettagli, in loco. Se ne trova traccia anche nella corrispondenza intercorsa fra Plinio (il giovane) e l' imperatore Traiano.

Le possibili rappresentazioni dei numeri.

La notazione di cui ci occuperemo, quella senza dubbio più importante dopo quella decimale, possiamo chiamarla “babilonese”. In questa, la posizione -x- delle cifre indica che esse si devono cosiderare moltiplicate per un coefficiente = 60^X. Si noterà che questa notazione è exagesimale solo nell' impiego di una serie di potenze di 60. All' interno di ciascun termine della serie l'

http://www.traianvs.net/

ulteriore suddivisione è decimale, e le operazioni avvengono proprio come in un sistema decimale fino a che i risultati non superino il numero 59, dopo di che si passa al termine successivo.
Per fissare le idee, e usando virgole per indicare i coefficienti non esplicitati:
30, 12, 0, 2 significa 30 * 60^3 + 12 * 60^2 + zero + 2 * 60^0 cioè
30 * 216000 + 12 * 3600 + zero + 2 * 1 = 6.523.202
I babilonesi non usavano però la virgola. Separavano gli addendi lasciando soltanto un piccolo spazio vuoto. In questo caso avrebbero scritto: 30 12 0 2.
Come scrivere i numeri positivi minori di uno ?
Noi li rappresentiamo dando valore negativo agli esponenti. I popoli antichi preferivano invece usare liste particolari di frazioni a numeratore 1, con una speciale notazione. Queste liste servivano a loro anche per risolvere problemini di geometria.
In tutte queste rappresentazioni è comunque assolutamente necessario che si indichi in quale punto della serie si trovi collocato il coefficiente di valore 1, cioè 600. Altrimenti il numero che abbiamo appena citato potrebbe essere inteso anche come
30 * 60^2 + 12 * 60^1 + zero + 2 * 60^-1 = 30 * 3600 + 12 * 60 + zero + 2/60 = 108720,03333...
Quando utilizziamo la notazione sessagesimale noi usiamo il segno ; (punto e virgola) per indicare dove comincino i valori minori di uno. Il secondo numero che abbiamo appena usato sarebbe perciò scritto: 30,12,0;2
I babilonesi non usavano neppure qui segni speciali. Lasciavano soltanto fra le cifre un intervallo un po' maggiore che altrove.
E' per noi incomprensibile questo uso degli intervalli al posto di specifici segni, anche su documenti di enorme importanza, come le bonifiche idrauliche o l' accatastamento di terreni. Un' abitudine molto pericolosa, che infatti rende incerte le letture su molti frammenti che sono pervenuti fino a noi.

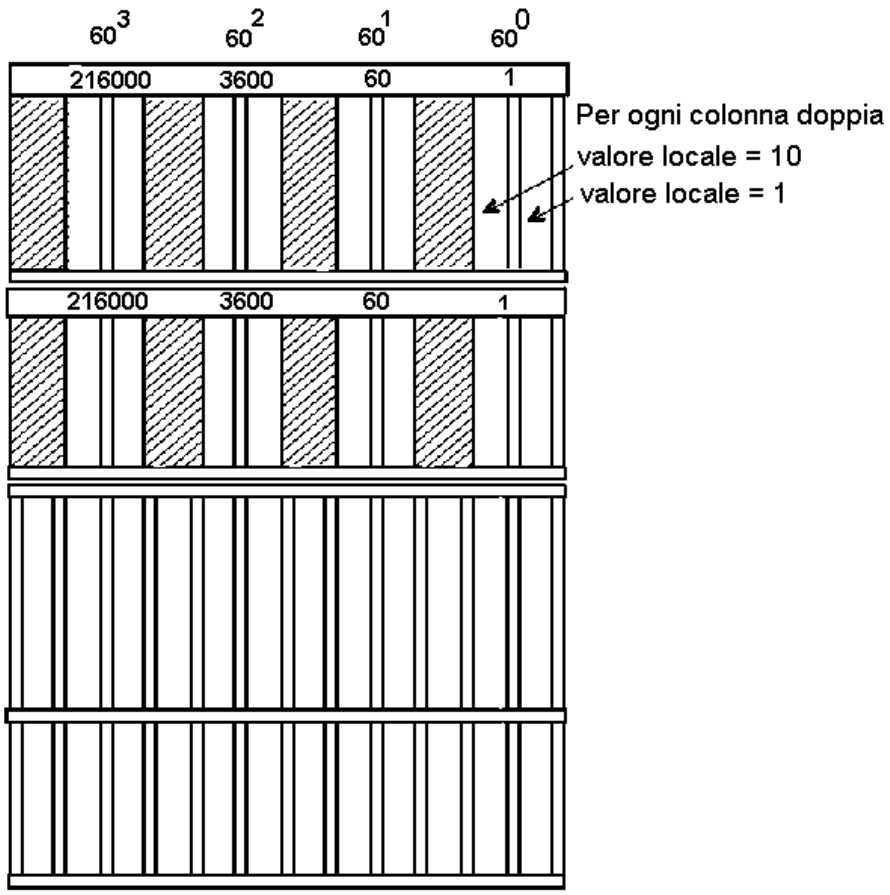
I possibili usi dell' abaco per notazione babilonese.
In via teorica sarebbe possibile impiegare l' abaco così come si farebbe per un sistema decimale anche conservando la notazione exadecimale. Basterebbe ricordarsi di leggere i dati e poi indirizzare adeguatamente i risultati ricordando sempre che i coefficienti sono le potenze di 60. Emergono però notevoli difficoltà che mostriamo qui di seguito.

Difficoltà per la composizione dei numeri.
Mentre per comporre un numero decimale, che va da uno a nove, noi possiamo usare nell' abaco "romano" soltanto 5 "calcoli" (di cui solo uno è speciale per colore o forma o posizione), ogni termine della numerazione babilonese contiene numeri da 1 a 59, che si dovrebbero rappresentare con il colore e con un adeguato numero di "calcoli". E' però praticamente impossibile rappresentarli sempre con tanti "calcoli" differenziati per forma e per colore, senza creare una grande confusione in chi poi dovrà usare i numeri. Perciò appare necessario che ogni termine abbia a disposizione due colonne, una per le decine e una per le unità, anche per rappresentare i numeri in forma analoga a quella con cui li scriviamo. Queste coppie di colonne devono restare ben visibili, perciò è opportuno lasciare una certa separazione fra le coppie contigue.
Nella figura 10 che segue è rappresentata una possibile soluzione.
Le zone tratteggiate dovrebbero essere rimovibili quando non servono.

http://www.traianvs.net/

In questo abaco si potrebbero conservare ai “calcoli” i due valori che hanno nell' abaco “romano” (valore 1 e valore 5). Occorrerebbe soltanto disporre un maggior numero di “calcoli”.
Il fatto che l' abaco ospita un minor numero di colonne sarebbe abbondantemente compensato dalla maggiore dimensione dei termini “babilonesi”. I coefficienti espressi in cima alle colonne servono solo come esempio di una particolare applicazione.

Fig. 10 Coefficienti delle colonne doppie



Difficoltà per calcolare i risultati delle operazioni.
Se in tutte le operazioni del calcolo si volesse conservare la scrittura sessagesimale “babilonese” dei numeri, sorgerebbero grandi difficoltà. Basta un modestissimo esempio a dimostrarlo.
Sia da eseguire la operazione a * b dove a = 12, 33, 0 b= 44, 18
Esplicitando i numeri con la nostra scrittura, l' operazione sarebbe
a * b = (12 * 60^2 + 33 * 60) * (44 * 60 + 18)
Per ottenere questo risultato dovremmo eseguire singole operazioni che possono essere del tipo 12 * 60^2 * 44 * 60. Occorrerebbe dunque ogni volta memorizzare i numeri (12 e 44), il loro prodotto diretto (cioè 12 * 44, un numero troppo grande per l' uso dei “calcoli”) e la nuova colonna di destinazione (quella dedicata a 60^3) .
E' evidente che questa procedura è impraticabile.

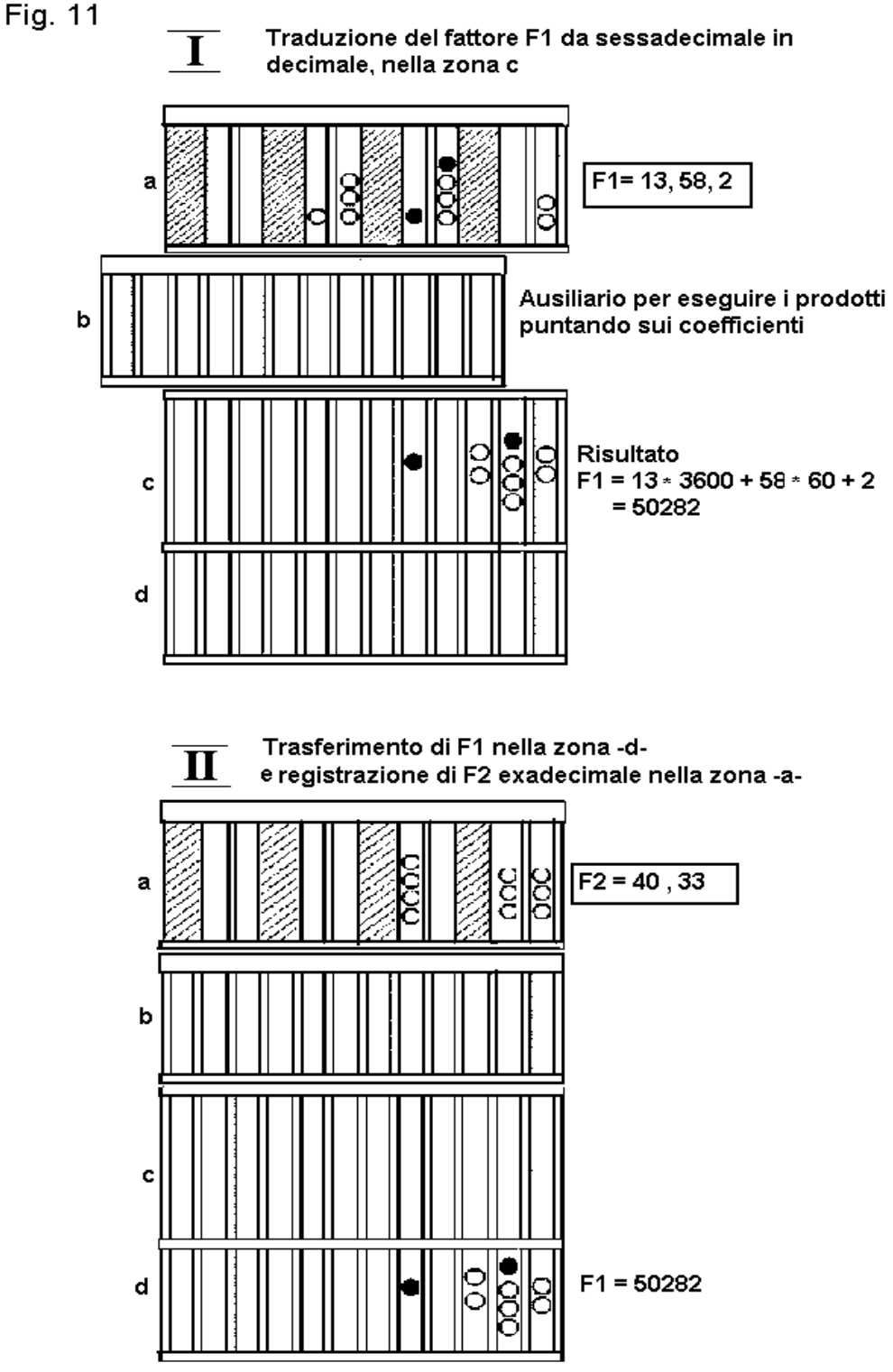
Possibile uso dell' abaco previa trasformazione dei dati da exadecimali a decimali.

http://www.traianvs.net/

Possiamo utilizzare la circostanza che i dati di partenza per l' operazione da svolgere sono certamente pervenuti su un supporto rigido. E' perciò possibile elaborare un primo termine (cioè trasformarlo in notazione decimale) senza che il secondo termine ingombri un reparto dell' abaco.

Moltiplicazione di due numeri babilonesi F1 * F2 dove F1 = 13,58,2 F2 = 40,33

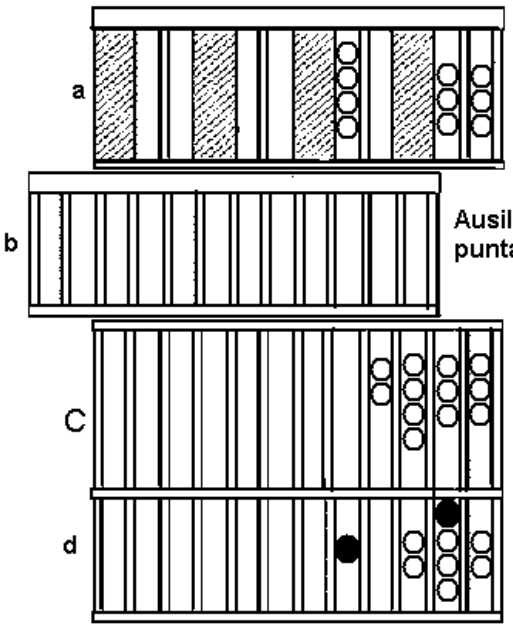
Fig. 11



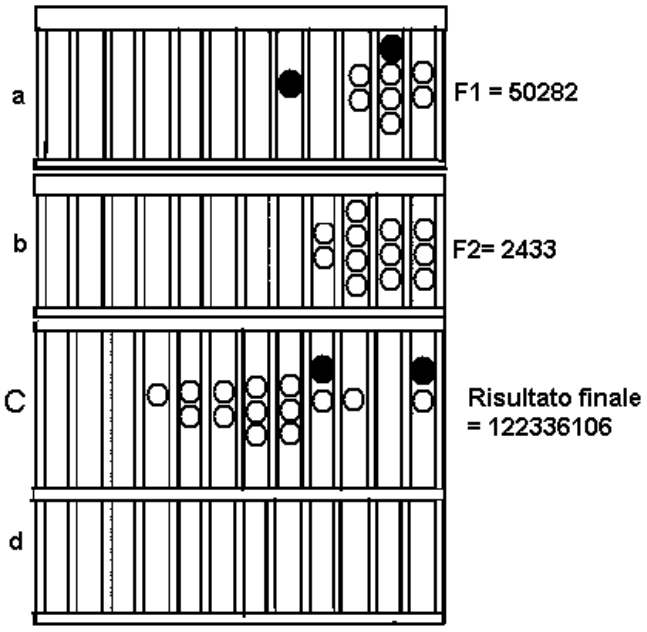
http://www.traianvs.net/

Fig. 12

III Traduzione del fattore F2 in decimale, nella zona C



IV Trasferimento di F1 e F2 decimali nelle zone operative e risultato finale decimale = 122 336 106

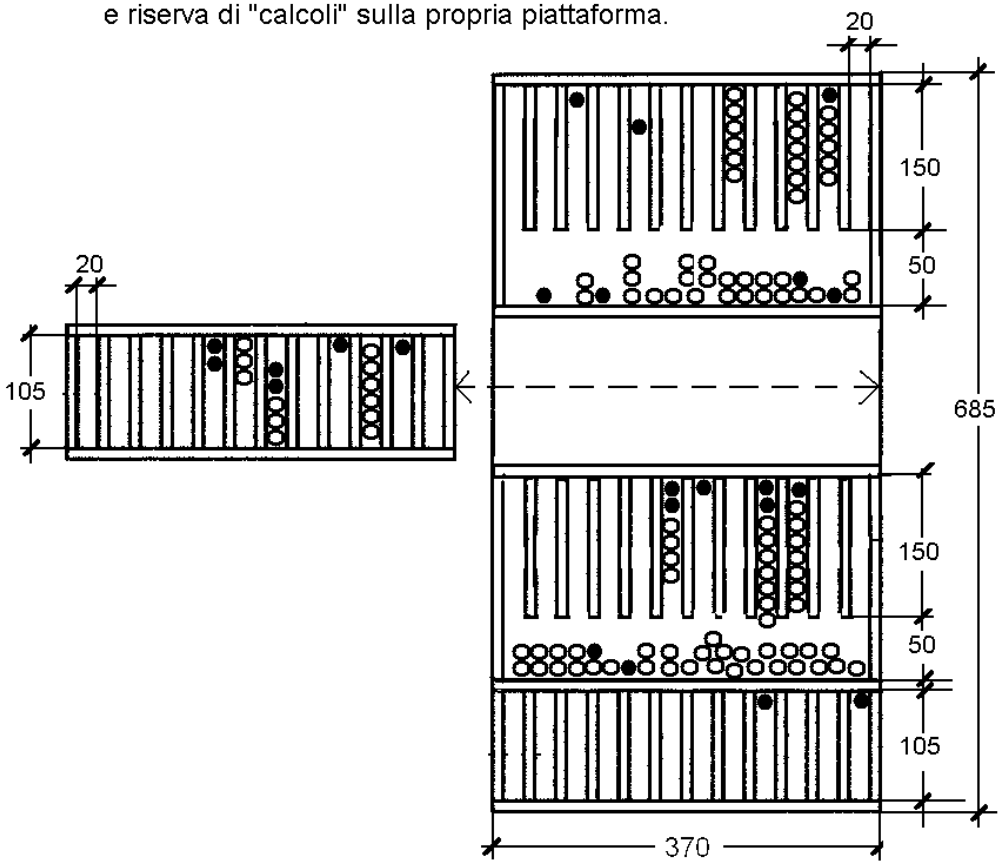


http://www.traianvs.net/

Possibili migliorie sull' abaco.

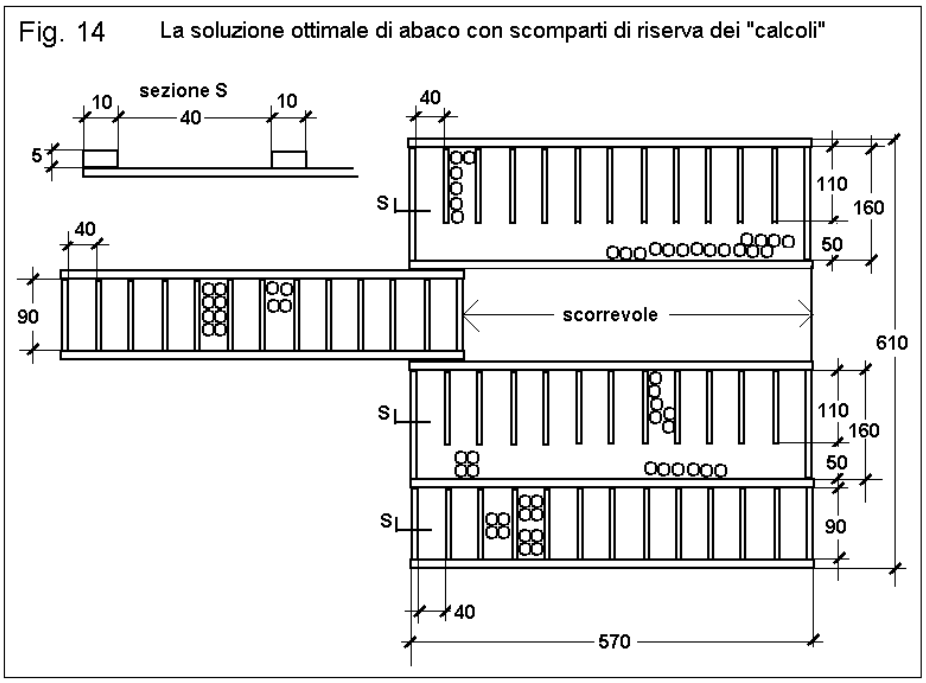
Un operatore non particolarmente esperto è certamente in grado di usare l' abaco con le modalità che ho finora ipotizzato, dopo circa due mesi di esercizio. L' utilizzazione pratica ha però reso evidente un piccolo inconveniente. Finora ho ipotizzato che la riserva dei "calcoli" da utilizzare si trovasse vicino all' abaco (per esempio, un mucchietto sul tavolo di lavoro oppure in una scatola da reggere con una mano). E' ovvio che il dover raccogliere di volta in volta questi "calcoli" richiede un po' di tempo, e anche fa distrarre lo sguardo dell' operatore.
E' certamente possibile creare dentro l' abaco stesso dei reparti, in modo da agevolare il prelievo. Potremmo per esempio costruire l' abaco come nella figura seguente:

Fig. 13 Possibile modello di abaco con corsie di 20 mm e riserva di "calcoli" sulla propria piattaforma.



La figura mostra subito che da questa variante derivano alcuni inconvenienti : uno è l' eccessiva lunghezza dello strumento, che costringe l' operatore a lavorare in piedi avendo una visuale troppo obliqua, un altro è che il guidare i singoli "calcoli" entro le loro strette corsie risulta alla lunga un po' fastidioso.
Possiamo grandemente migliorare il rendimento dell' abaco se facciamo conto sul fatto che un qualunque operatore professionale è certamente in grado di "leggere" le cifre anche quando i "calcoli" non si trovano perfettamente incolonnati nelle loro corsie.
Perciò niente vieta di costruire le corsie di larghezza utile doppia, riducendo la loro lunghezza. L' abaco diviene più largo, e questo regala più spazio al reparto che ospita i "calcoli" di riserva. Tutto questo è visibile nella figura che segue.

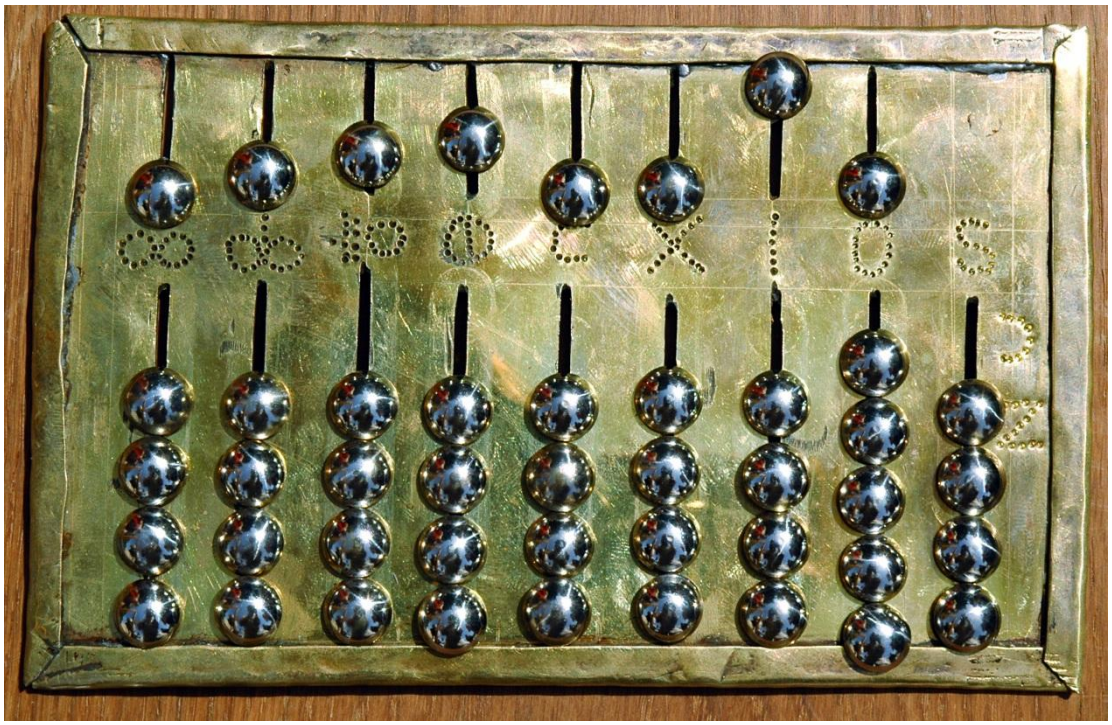
http://www.traianvs.net/



L' utilizzazione di questo modello è assolutamente identica a quella del modello precedente, perciò non ripeterò esempii di calcolo. Io stesso ho costruito questo modello, l' ho usato per circa un mese, e ho constatato che esso rende il lavoro più veloce e anche più sicuro. Per la sua costruzione non sono necessarii particolari materiali e particolari procedure. Basterebbero anche qui un telo e alcune bacchette, o addittura solo linee tracciate su un qualunque piano !

Conclusione.

Tutto quello che ho finora esposto mi porta a una sola conclusione: è estremamente probabile che gli antichi nostri Colleghi Romani, Greci e Mesopotamici usavano esattamente quest' ultimo modello di abaco.



http://www.traianvs.net/